「またりさま」の数学

2004 年春, 大内雅雄

三輪眞弘作, 架空の伝統芸能「またりさま」の数学的構造について. 気の向くとき, ポイントだけ整理してゆく.

0.1 原作

8 人が輪になり, 各人が隣の人の背中を見る形になり, 2 種の信号を送っていく。その信号は, 鈴の音とカスタネットの音だが, 以下では, 0 と 1 とする. 初期状態として 8 人それぞれ 0 か 1 のいずれかの値を決めておく. 音を出しはじめる 1 人目が,

(自分の状態数) と (直前の人の状態数) の排他的論理和
=(自分の新しい状態数) ⋯ ♠

で決まる (自分の新しい状態数) を次の人に音で伝える. 2 番目以降の人も同じ計算をして (自分の新しい状態数) を次の人に伝える.

たとえば, 初期状態が
1 0 0 1 0 1 1 1 ならば, そのあと,
0 0 0 1 1 0 1 0
0 0 0 1 0 0 1 1
⋮

0.2 漸化式表現

人数を任意にした場合も想定して, 一般性を失わない方法で, 8 人の場合をあつかう.

8 人それぞれの初期状態数を, a_1, a_2, ⋯⋯, a_8, 2 まわり目の各人の状態数を a_9, a_{10}, ⋯⋯, a_{16}, 3 まわり目以降も同様に表す. ♠ のルールが成立するように, 初期状態からさかのぼった状態を一意的に決めることもできるので, a_0, a_{-1}, a_{-2}, ⋯⋯ も考えておく.

よって, 8 人またりさまの音列パタンは,

$$\text{初期状態},\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_8 \text{ の値と,}$$
$$\text{漸化式},\ a_{n+8} \equiv a_{n+7} + a_n \bmod 2$$

で, 過去から未来まで一意に決まる. (以下, ≡ と mod 2 は略して, = だけで記す.)

特に, 初期状態が $a_1 = a_2 = \ \cdots\cdots\ = a_8 = 1$ のときの a_n を, 関数 $f(n)$ で表す. すなわち, $f(n)$ は

$$f(1) = f(2) = \ \cdots\cdots\ = f(8) = 1$$
$$f(n+8) = f(n+7) + f(n)$$

で決まる関数. この条件により, $n = 0$ 前後の $f(n)$ の値を書いてみると,

$f(-15)$ から $f(-8)$ まで→	1	1	0	0	0	0	0	0
$f(-7)$ から $f(0)$ まで→	1	0	0	0	0	0	0	0
$f(1)$ から $f(8)$ まで→	1	1	1	1	1	1	1	1

この $f(n)$ をつかうと, 任意の初期状態, $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_8$ に対する a_n が,

$$\begin{aligned} a_n =& f(n-8)a_1 + f(n-9)a_2 + f(n-10)a_3 + f(n-11)a_4 \\ &+ f(n-12)a_5 + f(n-13)a_6 + f(n-14)a_7 + f(n-7)a_8 \ \cdots \clubsuit \end{aligned}$$

で決まることが導かれる.

(証明) a_n を $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_8$ の式で表してゆくと,

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$a_9 = a_1 + a_8$	$a_{10} = a_1 + a_2 + a_8$	$a_{11} = a_1 + a_2 + a_3 + a_8$	$\cdots$				

a_n は $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_8$ の 1 次式であり, たとえば, a_1 の係数だけを書くと,

1 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 1

となる. この a_1 の係数数列を $\{k_n\}$ とすると, a_n と同じ形の漸化式 $k_{n+8} = k_{n+7} + k_n$ をみたす. しかも, $k_1 = f(-7), k_2 = f(-6), \cdots, k_8 = f(0)$ である. 数列 $\{k_n\}$ も $\{f(n)\}$ も連続 8 個の値が決まれば他はすべて一意に決まるので, 1 行目 10000000 が $f(-7), f(-6), \cdots$ と等しければ, 残りも等しくなる. a_1 の係数は $f(n)$ よりも 8 おくれで値が変化しているので, $f(n-8)$ と表せる.

同様に, a_2 の係数は, 最初の 8 個が 01000000 だから $f(-8), f(-7), \cdots$ であり, $f(n-9)$ と表せる. 以下, a_7 の係数までは同様.

a_8 の係数の最初の 8 個は 00000001 で, $f(-6), f(-5), \cdots$ なので $f(n-7)$.

以上から,

$$\begin{aligned} a_n =& f(n-8)a_1 + f(n-9)a_2 + f(n-10)a_3 + f(n-11)a_4 \\ &+ f(n-12)a_5 + f(n-13)a_6 + f(n-14)a_7 + f(n-7)a_8 \ \cdots \clubsuit \end{aligned}$$

となる. (証明終わり)

$\clubsuit$ は a_1 からはじまる連続 8 個の値を元にして, a_1 の $n-1$ 項あとの a_n を求める式と見られる. すると, 連続 8 個の値 $a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots\cdots, a_{m+8}$ から, a_{m+1} の $n-1$ 項後の a_{n+m} を求める式は

$$\begin{aligned} a_{n+m} =& f(n-8)a_{m+1} + f(n-9)a_{m+2} + f(n-10)a_{m+3} + f(n-11)a_{m+4} \\ &+ f(n-12)a_{m+5} + f(n-13)a_{m+6} + f(n-14)a_{m+7} + f(n-7)a_{m+8} \end{aligned}$$

となるはずである. これが, a_n の加法定理だが, 言い換えがいろいろできて, たとえば, $a_{n+m} = a_{(n+8)+(m-8)}$ として上の式を使うと,

$$\begin{aligned} a_{n+m} =& f(n)a_{m-7} + f(n-1)a_{m-6} + f(n-2)a_{m-5} + f(n-3)a_{m-4} \\ &+ f(n-4)a_{m-3} + f(n-5)a_{m-2} + f(n-6)a_{m-1} + f(n+1)a_m \end{aligned}$$

さらに, $f(n+1)=f(n)+f(n-7)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} a_{n+m} =& f(n)a_{m-7}+f(n-1)a_{m-6}+f(n-2)a_{m-5}+f(n-3)a_{m-4} \\ &+f(n-4)a_{m-3}+f(n-5)a_{m-2}+f(n-6)a_{m-1}+f(n-7)a_m+f(n)a_m \ \cdots \ \diamondsuit \end{aligned}$$

以上は, 任意の人数のまたりさまについても同様の公式を作れる.

0.3　またりさまの周期性

たとえば, 初期状態

$$(a_1,\ \cdots\ a_8)=(0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ )$$

のとき,

$$\begin{gathered} (a_2,\ \cdots\ a_9)=(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ ), \\ (a_3,\ \cdots\ a_{10})=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0\ ) \\ \vdots \end{gathered}$$

となってゆき, 連続 8 個の値の組が変化してゆく. 0 と 1 だけの値 8 個の組は, $2^8=256$ 種類しかできないので, いずれ, $(a_1,\ \cdots\ a_8)=(0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ )$ と同じ値の組が現れ, 後は同じ変化が繰り返される. つまり, 数列 a_n には周期があり, しかも, その周期は $2^8=256$ 以下である.

以下では, 任意の a_n の周期を調べる前に, $f(n)$ の周期を調べよう.

まず, $f(n)$ の諸性質を調べておく.

$\diamondsuit$ の a_n の特別の場合として $f(n)$ の場合を書けば

$$\begin{aligned} f(n+m) =& f(n)f(m-7)+f(n-1)f(m-6)+f(n-2)f(m-5)+f(n-3)f(m-4) \\ &+f(n-4)f(m-3)+f(n-5)f(m-2)+f(n-6)f(m-1)+f(n-7)f(m) \\ &+f(n)f(m)\ \cdots\ f(n)\text{ の加法定理} \end{aligned}$$

この式で, $m=n$ と置けば,

$$\begin{aligned} f(2n) =& f(n+n) \\ =& f(n)f(n-7)+f(n-1)f(n-6)+f(n-2)f(n-5)+f(n-3)f(n-4) \\ &+f(n-4)f(n-3)+f(n-5)f(n-2)+f(n-6)f(n-1)+f(n-7)f(n) \\ &+f(n)f(n) \end{aligned}$$

だが, $f(n)f(n-7)+f(n-7)f(n)=2f(n)f(n-7)$ は 2 の倍数なので, mod 2 では 0 に等しい. 他の項も同様に整理して,

$$f(2n)=f(n)f(n).$$

一般に, 0 か 1 の値だけ取る変数 x について, $x\times x\equiv x \bmod 2$ になるので,

$$f(2n)=f(n).\ \cdots\ \heartsuit$$

(♡ は, 人数が偶数 の場合のまたりさまのとき, 初期状態の値が全部 1 ではじまる数列 $f(n)$ について, いつも成立する.)

これは, 初期状態 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) の場合の数列 (音列) $f(n)$ の注目すべき特徴である.

♡ をくりかえし使うと, $f(4n) = f(2 \times 2n) = f(2n) = f(n)$, $f(8n) = f(2 \times 4n) = f(4n) = f(n)$ などで,

$$f(2^k n) = f(n). \ \cdots \ \star$$

たとえば,

$$f(1) = f(2) = f(4) = f(8) = f(16) = \ \cdots\cdots \ = 1.$$

これから, $8 - 1 = 7$, $16 - 1 = 15$, など, $2^m - 1$ の形の数が $f(n)$ の周期として予想できる. $f(n)$ の周期は手計算でもすぐわかり, $63 = 2^6 - 1$ である.

8 人の場合に限定されない方法で, 一般に, 2^k 人 ($k = 1, 2, 3, \cdots$) の場合の $f(n)$ の周期が $2^{2k} - 1$ であることが証明できた. それを以下に示す.

(準備) 周期を探すには, 連続 8 個の値の組が, 再び繰り返されるところを探せばよいので, まず, ♡ を拡張して,

$(f(n), f(n-1), f(n-2), \cdots, f(n-7)$) と

$(f(2n), f(2n-1), f(2n-2), \cdots, f(2n-7)$) の関係を調べる.

♡ から,

$f(2n-2) = f(n-1)$,

$f(2n-4) = f(n-2)$,

$f(2n-6) = f(n-3)$.

$f(n)$ のみたすべき漸化式から,

$$f(2n-1) = f(2n) + f(2n-8) = f(n) + f(n-4).$$

同様に

$f(2n-3) = f(n-1) + f(n-5)$,

$f(2n-5) = f(n-2) + f(n-7)$,

$f(2n-7) = f(n-3) + f(n-7)$.

これらの $f(2n - \square)$, $f(n - \square)$ の引かれる定数□の変化だけ書くと,

$$0 \to 0 \qquad 2 \to 1 \qquad 4 \to 2 \qquad 6 \to 3 \qquad \overset{\text{まとめて}}{2l \to l}$$

(分解図)

$$1 \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow 4 \end{array} \qquad 3 \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow 5 \end{array} \qquad 5 \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 6 \end{array} \qquad 7 \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 7 \end{array} \qquad \overset{\text{まとめて}}{2l+1 \begin{array}{l} \nearrow l \\ \searrow l+4 \end{array}}$$

【式の対称性による証明】$8 = 2^3$ 人またりさまの $f(n)$ の周期が $63 = 2^6 - 1$ あるあることを, 2^k 人の場合でもできる方法で示す.

m の連続 8 整数値に対して, $f(2^6 + m) = f(1 + m)$ を示せばよい. 式変形の都合で $f(2^6 n + m) = f(n + m)$ (n は任意整数) $\cdots$ * を示すことにする. これを示してから, $n = 1$ とおけばよい.

さらに, * のかわりに,

$$f(2^3n+m)=f(n+2^3m)\ \cdots\ ⓢ$$

を示すことにする. なぜなら, ⓢを示せたら, n のかわりに 2^3n をⓢを代入して,

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=f(2^3\times 2^3n+m)=f(2^6n+m),\\ \text{右辺}&=f(2^3n+2^3m)=f(2^3(n+m))=f(n+m)\end{aligned}$$

で, $f(2^6n+m)=f(n+m)\ \cdots\ *$ が示されるから.

そこで, ⓢの証明.

ⓢの左辺を加法定理で展開して,

$$\begin{aligned}f(8n+m)=&f(8n)f(m-7)+f(8n-1)f(m-6)+f(8n-2)f(m-5)+f(8n-3)f(m-4)\\ &+f(8n-4)f(m-3)+f(8n-5)f(m-2)+f(8n-6)f(m-1)+f(8n-7)f(m)\\ &+f(8n)f(m)\\ =&\sum_{0\le c\le 7}\{f(m-c)f(8n-\overline{c})\}+f(m)f(n)\end{aligned}$$

ここで, $\overline{c}=7-c$ で, c の補数と呼んでおく.

ⓢの右辺は, 左辺の n と m を入れ替えた式だから,

$$f(n+8m)=\sum_{0\le c\le 7}\{f(n-c)f(8m-\overline{c})\}+f(n)f(m)$$

$$\sum_{0\le c\le 7}\{f(m-c)f(8n-\overline{c})\}=\sum_{0\le c\le 7}\{f(n-c)f(8m-\overline{c})\}\ \cdots\ ★$$

を示せればよい.

★ 左辺の $f(8n-\overline{c})$, たとえば, $f(8n-5)$ を変形すると,

$$\begin{aligned}f(8n-5)=&f(4n-2)+f(4n-6)\\ =&f(2n-1)+f(2n-3)\\ =&f(n)+f(n-4)+f(n-1)+f(n-5)\end{aligned}$$

$f(8n-5)$ の場合の定数変化

$$\begin{tikzcd}
0 & & & \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[dl] & 2 \arrow[l] & \\
4 & & & 5 \arrow[ul] \arrow[ddl] \\
1 & & & \\
 & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] & 6 \arrow[l] & \\
5 & & &
\end{tikzcd}$$

引かれる定数だけ注目すると, $5\to 0$ と 4 と 1 と 5 であり, 2 進法でかくと, $101\to 000$ と 100 と 001 と 101. 101 に対し, どの桁の数字もより小さいか等しい数のすべてが, 変化後の 4 数である.(2 進法のひきざんが繰り下がりなしにできる, と言ってもよい) このようなとき, たとえば「100 は, 101 の川下」あるいは「4 は 5 の川下」あるいは $5\searrow 4$ と表そう.

任意の $f(8n-\overline{c})$ を $f(n-\square)$ の和に変形したとき, $\overline{c}$ の川下のすべてが定数$\square$に現れる. (→証明補足)

ⓢの左辺 $f(8n+m)$ の展開項のひとつ $f(8n-5)f(m-2)$ から, $f(n-4)f(m-2)$ が生まれることがわかったが, 引かれる定数について言うと, 「4 は (2 の補数 5) の川下」($\overline{2}\searrow 4$) である.

この用語で言うと, $\overline{2} \searrow 4$ であるから, $f(8n+m)$ の展開から $f(n-4)f(m-2)$ が生まれる, と言える.

次に, $\overline{2} \searrow 4$ から, $\overline{4} \searrow 2$(「2 は (4 の補数 3) の川下」) も正しいことが確かめられる. 下図参照.

$\overline{2}(=5)$	1 0 1	ならば,	2	0 1 0
4	1 0 0		$\overline{4}(=3)$	0 1 1

(2 進法表示では, 補数は元の数と, 01 が反対になる. 一般には, $\overline{a} \searrow b$ ならば $\overline{b} \searrow a$ であることがわかる.)

$(\overline{4} \searrow 2)$ であることは, $f(n+8m) = f(8m+n)$ の展開から $f(m-2)f(n-4)$ が生まれることを意味する.

こうして ⓢの左辺 $f(8n+m)$ から生まれる $f(n-4)f(m-2)$ は, ⓢの右辺 $f(n+8m)$ からも生まれることがわかった. 他の $f(n-\square)f(m-\triangle)$ についても同様なので, 全体として, ★ が成立する.

よって,

$$f(8n+m) = f(n+8m) \ \cdots \ ⓢ$$

が言える.

これから前述の通りさかのぼって, $f(2^6n+m) = f(n+m)$ となり, $n=1$ とすれば $f(2^6+m) = f(1+m)$. これは 8 人またりについて, $2^6-1=63$ が $f(n)$ の周期であることを示している. (証明終わり)

以上は, 人数が 2^k 人 $(k=1,2,3,\cdots)$ の場合に一般化でき, $2^{2k}-1$ が, $f(n)$ の周期であることが証明される.

【$2^6-1=63$ が $f(n)$ の最小周期であること】ここまでで証明したのは, 「63 が $f(n)$ の周期であること」で, 次に $f(n)$ のより小さい周期の可能性を調べる. より小さい周期は, 63 の約数, 1, 3, 7, 9, 21 しかありえない. このうち, 周期が 1 であることはありえない. なぜなら, $f(1)=1$, $f(0)=0$ で, $f(n)$ は異なる値を取るから.

さて, $f(n)$ の値を $n=-7$ から $n=9$ まで書いてみると,

$f(-7)$ から→ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

$f(1)$ から→ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

$f(9)=0$

$f(1)=f(2)= \cdots =f(8)=1$ のように連続 8 個の 1 がふたたび現れるには, 「0 と 0 の間の 8 個以上のスキマ」ができることが必要である. n の負方向にさかのぼってスキマを探そう.

$f(0)=f(-1)= \cdots =f(-5)=f(-6)=0$ より,

$f(0)=f(-2)= \cdots =f(-10)=f(-12)=0$,

$\vdots$

$f(0)=f(-8)= \cdots =f(-40)=f(-48)=0$.

したがって, $f(0)$ から, $f(-48)$ までは, 「0 と 0 の間の 8 個以上のスキマ」ができない. したがって, かりに, $f(-49)=f(-50)= \cdots =f(-56)=1$ としても, $f(1)=f(2)= \cdots =f(8)=1$ とくらべて, 周期は $1-(-56)=57$ である. よって, $f(n)$ の周期は 57 以

上である．63 の約数で 57 以上の数は, 63 自身だけなので, $f(n)$ の周期は 63 以外ありえない．よって, 63 が $f(n)$ の最小周期である．

上記のことを, 人数が 2^k 人 ($k = 1, 2, 3, \cdots$) の場合に一般化すると, $f(n)$ の周期は $2^k(2^k - 1) + 1$ 以上であることがわかる．一方, $f(n)$ の周期は $2^{2k} - 1$ の約数であることが必要である．これらの条件をみたすのは, $2^{2k} - 1$ のみであることも簡単に確かめられる．

証明補足

$f(8n - c_0) = (f(4n - c_1)$ の和$) = (f(2n - c_2)$ の和$) = (f(n - c_3)$ の和$)$ の変形で, c_3 は c_0 の川下 ($c_0 \searrow c_3$) になる理由．

c_0 は 0 以上 7 以下の整数なので, $c_0 = x_2 \times 4 + x_1 \times 2 + x_0$ (x_2, x_1, x_0 は, 値が 0 か 1 で, c_0 の 2 進表示の各桁の数) と表せる．

定数 c_0 の変化 (分解図参照) を 2 進表示で考える．

c_0 が偶数のとき, $x_0 = 0$ で, $c_0 = x_2 \times 4 + x_1 \times 2 + 0$. それを 2 で割って, $c_1 = 0 \times 4 + x_2 \times 2 + x_1$ になる．

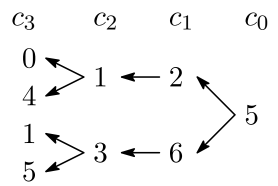
c_0 が奇数のときは, $x_0 = 1$ で, $c_0 = x_2 \times 4 + x_1 \times 2 + 1$. それから 1 を引いて 2 で割ると, $c_1 = 0 \times 4 + x_2 \times 2 + x_1$, さらに 4 をたすと, $c_1 = 1 \times 4 + x_2 \times 2 + x_1$ になる．

これらから定数 c_1 は, 1 個か 2 個あるが,

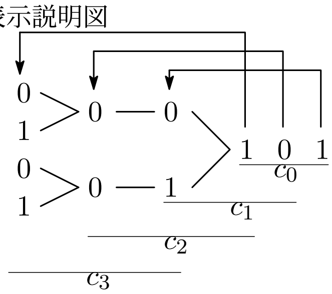
$c_1 = (x_0$以下の数$) \times 4 + x_2 \times 2 + x_1$

と, まとめて表せることがわかる．

$f(8n-5)$ の場合の定数変化



$f(8n-5)$ の定数変化の 2 進表示説明図



同等のの変化を繰り返すと,

c_2 は 1 個から 4 個あるが, まとめて,

$c_2 = (x_1$以下の数$) \times 4 + (x_0$以下の数$) \times 2 + x_2$.

c_3 は 1 個から 8 個あるが, まとめて,

$c_3 = (x_2$以下の数$) \times 4 + (x_1$以下の数$) \times 2 + (x_0$以下の数$)$ したがって, c_3 は c_0 の川下 ($c_0 \searrow c_3$) である．

0.4　その他の結論と予想

以下に, 2004 年 4 月現在の主な結論と予想のみ書いておく．くわしくはいずれ $\cdots$

人数が偶数の場合,

$$f(2n) = f(n). \quad \cdots \ \heartsuit$$

だったが, これは人数が奇数の場合は成り立たない．

そのかわり,

$$g(n) = f(n+1)$$

で定義される関数 $g(n)$ を考える．これは数列 $f(n)$ を 1 ずらしただけの数列.(たとえば 5 人ならば, $g(1)$ から順に, 1, 1, 1, 1, 0)

すると, 奇数人数の場合,

$$g(2n) = g(n)$$

(証明済み)

次に, 偶数奇数によらず, 人数を M 人とし, その場合の関数 $f(n)$ あるいは $g(n)$ の周期を p とする. このとき,

$$\frac{2^{Mk}-1}{2^k-1}\text{人のとき, その場合の周期は}\frac{2^{pk}-1}{2^k-1}(k=1,2,3,\ \cdots) \quad \bigstar$$

$M=2$ のとき $p=3$ になることは直接調べればわかるが, その場合の ★ は

$$\frac{2^{2k}-1}{2^k-1}\text{人のとき, その場合の周期は}\frac{2^{3k}-1}{2^k-1}(k=1,2,3,\ \cdots)$$

であり, これは証明できた.

$(M=2,\ p=3)$ 以外の場合は未証明なので**予想**である. しかし, コンピューター計算で数例調べたかぎりではいつも成立している.

【人数と周期】手計算やコンピューター計算と理論から導かれた数値の表. 「ひとめぐり周期」は, 0 だけが続くパタン以外の全パタンをひとめぐりする.

人数	$f(n)$ や $g(n)$ の周期	備考
2	3	2^1 人で周期 $2^{2\times1}-1$ ひとめぐり周期
3	7	★ $M=2,\ p=3,\ k=1$ ひとめぐり周期
4	15	2^2 人で周期 $2^{2\times2}-1$ ひとめぐり周期
5	21	★ $M=2,\ p=3,\ k=2$
6	$63=2^6-1$	ひとめぐり周期
7	127	★ $M=3,\ p=7,\ k=1$ ひとめぐり周期
8	63	2^3 人で周期 $2^{2\times3}-1$
9	73	★ $M=2,\ p=3,\ k=3$
10	$889=(2^{21}-1)\div2359$	
11	$1533=(2^{18}-1)\div171$	
12	3255 ($2^{60}-1$ の約数)	
13	7905 ($2^{40}-1$ の約数)	
14	11811 ($2^{70}-1$ の約数)	
15	$32767=2^{15}-1$	★ $M=4,\ p=15,\ k=1$
16	255	2^4 人で周期 $2^{2\times4}-1$

人数	$f(n)$ や $g(n)$ の周期	備考
17	273	★ $M = 2$, $p = 3$, $k = 4$
18	253921 ($2^{65} - 1$ の約数)	
19	413385 ($2^{420} - 1$ の約数)	
20	761763 ($2^{130} - 1$ の約数)	
21	5461	★ $M = 3$, $p = 7$, $k = 2$
22	$4194303 = 2^{22} - 1$	ひとめぐり周期
23	2088705 ($2^{104} - 1$ の約数)	
24	$2097151 = 2^{21} - 1$	
25	10961685 ($2^{264} - 1$ の約数)	
31	$2097151 = 2^{21} - 1$	★ $M = 5$, $p = 21$, $k = 1$
32	1023	2^5 人で周期 $2^{2\times5} - 1$
33	1057	★ $M = 2$, $p = 3$, $k = 5$
64	4095	2^6 人で周期 $2^{2\times6} - 1$
65	4161	★ $M = 2$, $p = 3$, $k = 6$
127	$2^{127} - 1$	★ $M = 7$, $p = 127$, $k = 1$ ひとめぐり周期
128	16383	2^7 人で周期 $2^{2\times7} - 1$
129	16513	★ $M = 2$, $p = 3$, $k = 7$