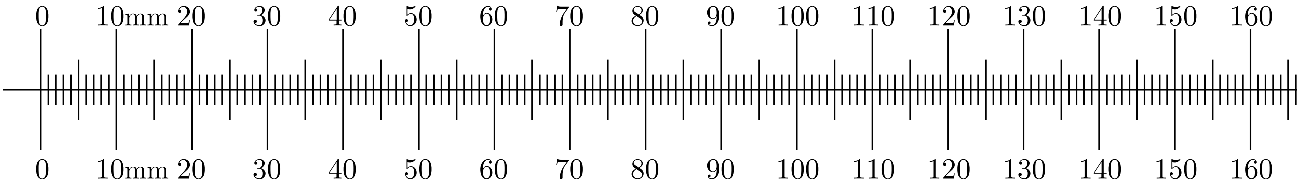
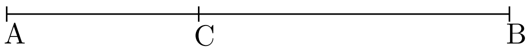


「アートとしての数学」 http://haniu.a.la9.jp/nuas/index.html

黄金分割について

黄金分割の定義



線分 AB を,

$\mathrm{AC} : \mathrm{CB} = \mathrm{CB} : \mathrm{AB}$

となるような点 C で分割すること, 言いかえると,

短 : 長 = 長 : 全体

となるような点 C で分割することが**黄金分割**と呼ばれている. 計算によると,

$\mathrm{AC} : \mathrm{CB} = 1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 : 1.618$

となる. 以下では $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を ギリシャ文字 ϕ(ファイ) で表そう.

フィボナッツィ数列と黄金比

1, 1 からはじめ, 前の 2 数をたして次の数を作ることを繰り返すと,

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, $\cdots$

のような数列ができる. これを**フィボナッツィ数列**という.

フィボナッツィ数列の隣同士の 2 数に注意してみよう.

たとえば, 2 と 3 を見ると, $3 \div 2 = 1.5$ なので,

3 は 2 の 1.5 倍である. このことを比で表すと,

$2 : 3 = 1 : 1.5.$

同様にして, 隣同士の数の比を $1 : \boxed{}$ の形にしてください.

$3 : 5 = 1 : \boxed{}$

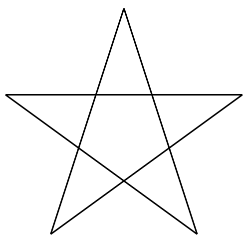
$5 : 8 = 1 : \boxed{}$

$8 : 13 = 1 : \boxed{}$

$\cdots\cdots$

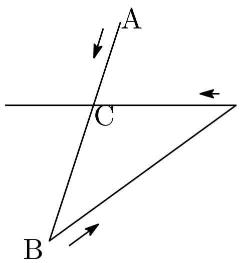
これをどんどん続けてください．すると, 隣同士の比は黄金比に近づいてゆく.

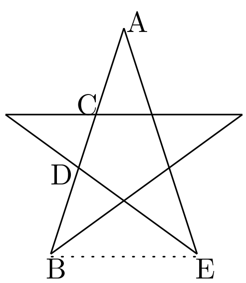
五芒星 (ペンタグラム) に現れる黄金分割



一筆書きで書ける星型を, 星のとんがりが正五角形の頂点になるように描くとペンタグラム (五芒星) になる.

一筆書きの途中で, 前に描かれた線分を横切るが, これが黄金分割になっている. (証明は後述)
図ならば, 点 C は, 線分 AB を $1 : \phi = 1 : 1.618\cdots$ に分割する.





CB と AD は同じ長さなので, AC : CB = AC : AD となり, AC : AD も黄金比である. さらに, 黄金分割において, 長 : 全体 = 短 : 長 なので, AC : AD = CD : AC となり, CD : AC も黄金分割であることがわかる.

ペンタグラム (五芒星) と形の呪力

五芒星 (ペンタグラム) は, 古くから, 世界各地の文化に現れてきた興味深い図形である. およそ時代順に挙げる. ほとんどのデータは, 岡田保造 著「魔よ

け百科」(丸善), 同著「魔よけ百科 世界編」(以下「世界編」と略記)(丸善) から取っている.

- メソポタミアのジェムデッド・ナスルで出土した, 紀元前 3 千年紀初めの壺に五芒星が描かれているが, 魔除けとして描かれたかは不明.(「世界編」p.80)
- 古代ギリシャの数学者たちは, ペンタグラムと黄金分割の関係を知っていた. ただし, 黄金分割は単に「分割」と呼ばれ, その比は「中外比」と呼ばれた.「黄金分割 (golden section)」という言い方は近代になってからである.

  古代ギリシャのピタゴラス派 (B.C 6 世紀以降) は, 東方帰りの教祖ピタゴラスが始めた教団で, 数学, 天文学, 音楽などを研究していたが, その教団のシンボルとしてペンタグラムを用いた. このピタゴラス派が, 無理数 (分数で表せない数) を発見し, ショックのあまりその発見を外部に秘密にしたと言われる. その発見のきっかけとなった無理数が $\sqrt{2}$ なのか $\phi(=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618)$ なのかその他の数かはわからないが, ϕ が最も初期に研究された無理数のひとつだったことは想像できる.
- イスラエルのエルサレム, ローマ帝国ハドリアヌス帝 (在位 A.D.117〜138) 時代の道路の敷石に五芒星.(「世界編」p.28)
- イスラエルガリラヤ湖北岸カペナウムのシナゴーグ (ユダヤ教礼拝所) 跡. 4 世紀と考えられる. フリーズ (梁の一種) の装飾に五芒星と六芒星.(「世界編」p.26)
- 中国タクラマカン砂漠南端の尼雅 (ニヤ) 遺跡 (3,4 世紀) から出土した柄杓に五芒星.(「魔除け百科」p.6)
- 鳥取県の阿古山 22 号墳 (6,7 世紀) に五芒星の刻印. 魔除けかどうかは不明. これが古墳と同時期とすると日本最古の五芒星.(「世界編」p.80)
- 古代山城の刻印. 久留米市東部, 石垣高屋遺跡の石積み最上段の石材 2 つに五芒星. そこから 8 世紀の土器が出土している. (「魔除け百科」p.90)
- 奈良地方の寺の鬼瓦についている五芒星の例. 唐招提寺東室の東北方鬼瓦. 法隆寺中院本堂の東北方. 金剛山寺 (矢田寺) 鐘楼の西北方の鬼瓦. 西大寺南門の鬼瓦. (「世界編」p.78)

- 群馬県の河川敷の祭祀遺跡から 8 世紀前半の五芒星を刻んだ土器. 秋田県の祭祀遺跡からも, 五芒星を墨書した土器.(10 世紀) これらの地はしばしば増水に襲われる地という点で共通している.(「魔よけ百科」p.6)
- 平安時代の日本の陰陽師 (おんみょうじ, まじない師みたいなもの), 安倍清明 (あべのせいめい, 10 世紀) は五芒星を紋章として使っていた. 京都の晴明神社に行くと提灯 (ちょうちん) や瓦など至る所に五芒星が張りついている. 安倍清明は一時名古屋に住んでいたと言われ, 名古屋にも晴明神社がある.(千種区晴明山. 名古屋ドームの近く)
- 中国杭州六和塔 (十三重の塔)10 世紀創建 12 世紀再建. 塔の最上層天井に五芒星. (「世界編」p.6)
- スイス, レマン湖東岸にあるシヨン城. 壁に魔除けの五芒星. 12,3 世紀. (「世界編」p.34)
- ロンドン塔の一部?ウェイクフィールド塔 (13 世紀) の監視部屋石壁に五芒星と六芒星.(「世界編」p.38)
- 静岡県伊東市の日蓮宗仏現寺の瓦にたくさんの五芒星.(「世界編」p.60)
- 日本近世の城の石垣に刻印された五芒星の例. 甲府城の石垣に五芒星他の刻印.(「世界編」p.62) 金沢城, 大手門と河北門の石垣に大きな五芒星. (「世界編」p.68) 唐津城の石垣に五芒星他の魔除け刻印.(「世界編」p.90)
- 秋田市, 久保田城を居城とする佐竹氏の軍旗の乳に五芒星他の呪符.(「世界編」p.50)
- ゲーテ (ドイツ, 1749〜1832) の戯曲「ファウスト」では, 悪魔メフィストフェレスは, 主人公ファウストの部屋に描いてあった魔除けの五星形の角のひとつがちょっと開いていたので部屋に入りこめた, とある.
- 秘密結社フリーメーソンのマーク.
- 滋賀県蒲生岡本町の高木神社の注連縄 (しめなわ) に, 木の枝で組まれた五芒星. その近くの上麻生町旭野神社の注連縄に木の枝で組まれた六芒星. (「世界編」p.70)
- 日本の海女 (あま) のお守り.

次の図は, 日本の海女が海に潜るとき, 身に着ける手ぬぐいや磯ノミの柄につける魔よけの印. 左から, セーマン, ドーマンと呼ばれる.

セーマン　　　　　　　　ドーマン

次は, ゲーテ (1749-1832) の戯曲「ファウスト」の一節. 悪魔メフィストフェレスが, 主人公ファウストの書斎から出にくい理由は, ペンタグラムのためだという話.

メフィストフェレス 実はですね, ちょいとした差し障りがありましてね. この部屋を出にくいのです.

あれですよ, そこのしきいの上に描いてある星形の魔除け, あれが困るのです—

ファウスト あの魔除けが邪魔だ?

あれが邪魔で部屋を出て行かれないのなら,
一体君はどうしてここへ入ってこられたのだ.
どうやってあの護符の目をくらましたのだ.

メフィストフェレス よくごらんになってください. 線の合っていないところがあるでしょう.

外の方へ向いている角のひとつが,
ほら, ちょっと開いているではありませんか.

ファウスト ほほう, これは偶然の儲けものだ.

君は己のとりこになってしまったというわけだ.
これは大きなまぐれ当たりだ.

メフィストフェレス むく犬に化けてここへ飛び込んできた時は気がつきませんでしたが, わたしが正体を現した今となっては, ちょっと勝手がちがってくるのです.

悪魔はこの家の外へは出られないのです.

ファウスト 窓からでも出て行けばいいではないか.
メフィストフェレス 忍び込んだところから出て行くというのが, 悪魔や化け物のきつい掟でしてね.
　入る時はどこから入ろうと勝手なのですが. その入ったところから出て行かなければならないので.
ファウスト ほう, 地獄にも掟があるのか.
　(中略. ファウストが寝入った後)
メフィストフェレス さてこの敷居の上に描かれたまじないを破るには, ねずみの歯が要る. 奴らを呼び出すのに手間はかからない.
　もうそこで一匹がさごそやっている, 早速そいつに申しつけよう.
　(後略. メフィストフェレスは, ねずみに, 印のとがった所をかじらせて, 部屋から出て行く)
　(高橋義孝 訳)

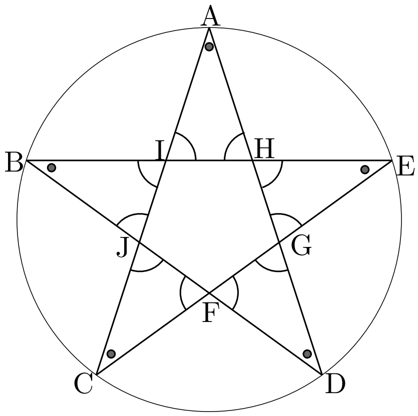
黄金比の例, その他

- ユークリッドの原論 (ギリシャ数学を近代や現代まで伝えてくれた歴史的ベストセラー. 紀元前 300 年頃) には, 黄金分割の作図法が載せられている.
- 絵のキャンバスの海型 (M Marine) の縦横比 $1 : \phi$.
- 中世以来のヨーロッパの本の装丁.
- 黄金比と「わりと近い」という例として. 現代の日本の新書版の本や英語のペーパーバック本の縦横比. 日本の名刺. 日本の各種カード類も名刺の大きさに合せたためか黄金分割の比にわりと近い.

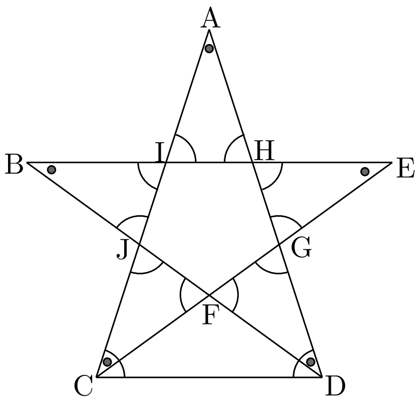
古代, 中世, 近代を通して, 美術作品や建築に黄金比は多く見られると, しばしば言われてきたが, この点は慎重に考える必要があるだろう.

たとえば, 古代ギリシャのパルテノン神殿の縦横比は黄金比だとしばしば言われてきたが, 近代の解釈者が建物のどことどこを縦と横をみなすのか. また, 古代にパルテノン神殿を作った設計者には黄金比の意図があったのかどうかも不明だろう. ミロのヴィナスの (へそ上) : (へそ下), 中世ヨーロッパの建築, 都市計画, 中世以降の絵画の構図などについても黄金比が指摘されてきたが, 個々のケースについて注意深い判断が必要だろう.

ペンタグラムに黄金分割が現れる数学的証明



ペンタグラムは, 円周を 5 等分する点を結んでできる．左図で, たがいに同じ大きさの角を同じ印で表した.



次に, 2 点 CD を結ぶ．BE と CD は平行になるので, $\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{AIH}$(平行線の同位角) などとなり, 再び, 同じ大きさの角を同じ印で表した．等しい大きさの角に注意すると,
$\triangle \mathrm{AIH} \sim \triangle \mathrm{ACD} \sim \triangle \mathrm{DJC}$. ($\sim$ は相似)
すると,
$\mathrm{CJ} : \mathrm{JD} = \mathrm{DC} : \mathrm{CA}$ $\cdots$①

ところで, $\triangle \mathrm{DJC}$ は 2 角が等しいので二等辺三角形である．よって, $\mathrm{DC} = \mathrm{JD}$.
また, $\triangle \mathrm{JDA}$ は 2 角が等しいので二等辺三角形である．よって, $\mathrm{JD} = \mathrm{JA}$.
まとめて, $\mathrm{DC} = \mathrm{JD} = \mathrm{JA}$ $\cdots$②.
①②より,
$\mathrm{CJ} : \mathrm{JA} = \mathrm{JA} : \mathrm{CA}$ $\cdots$③
③ は 点 J が線分 CA を黄金分割することを表している．つまり,
$\mathrm{CJ} : \mathrm{JA} = \mathrm{JA} : \mathrm{CA} = 1 : \phi$.
同様にして, HI : IA, DC : CA, CJ : JD などもすべて黄金分割の比 $1 : \phi$ であることがわかる.