「アートとしての数学」の授業で使う資料やテキストはこちら↓

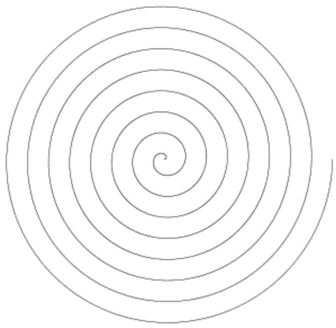
http://haniu.a.la9.jp/nuas/index.html

螺旋 (らせん)

銀河系の渦巻きから遺伝子 DNA の二重螺旋まで, 世界は螺旋に満ちている。「クルクルまわり続けスタート地点に戻らない曲線」ならば何でも「螺旋」と呼ばれており, いろんな種類の「螺旋」があるが, 特によく知られている 3 種類だけを挙げておく.

- **アルキメデス螺旋**

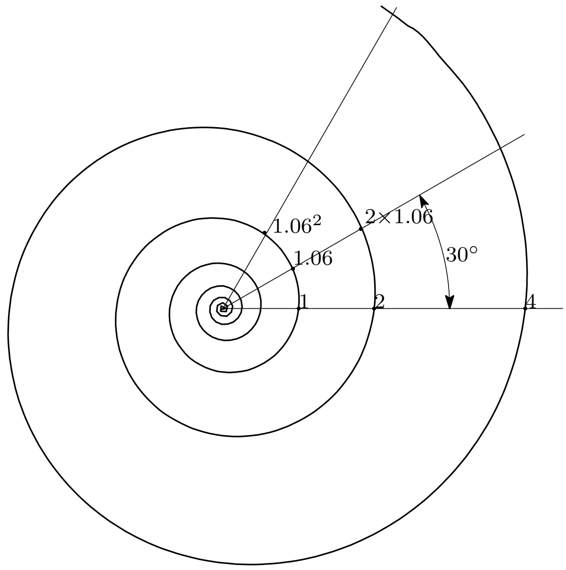
  幅一定のものが回転して巻いてゆくときできる螺旋形.
  (例) ロープを巻いてできる螺旋. 蛇のトグロ形。

- **対数螺旋 (等角螺旋)**

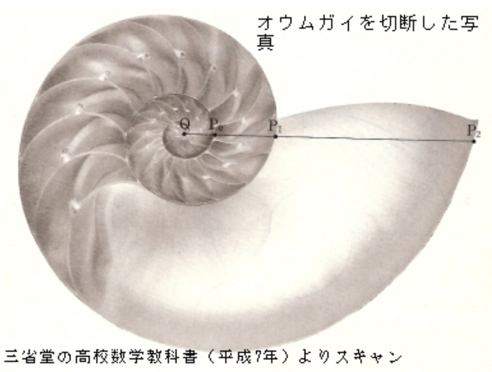
  巻貝に見られる螺旋は, 回転とともに, 中心からの距離が加速度的に増えていく螺旋で, 対数螺旋と呼ばれる.

右図の対数螺旋の場合には, 螺旋上のどの点からでも左回りに 1 周／360° 進むと中心からの距離が 2 倍になっている. この同じ螺旋を, どの点からでも左回りにたとえば 30° 進むと中心からの距離は約 1.06 倍になる.
一般的に言うと, **対数螺旋とは, ある定点のまわりに一定角度回転するごとに, その定点からの距離が一定倍になってゆく曲線**である.
(例) **対数螺旋の例**. 巻貝. 銀河系の渦構造. ビデオカメラでモニター自身を撮影するときに現れる図形. ある種の昆虫が光に向かって飛ぶときにとる道筋. 象の鼻やカメレオンの尾も, 巻くと対数螺旋に近いと言われる.



数は螺旋の中心点からの距離. 単位は cm. 小数はおよその値.

写真はオウムガイを切断して現れた形で, 現れた対数螺旋は, 一周回転するごとに, 定点からの距離が ほぼ 3 倍になっている。すなわち, OP_2 の長さは OP_1 の長さの 3 倍で, OP_1 の長さは OP_0 の長さの 3 倍.



- **つるまき線**

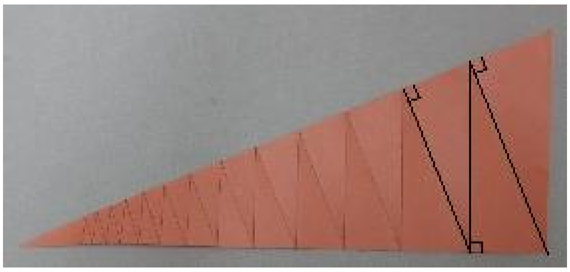
回転しながら上下にのびてゆく形。例。螺旋階段。バネ。遺伝子 DNA の 2 重螺旋構造。DNA の発見 (20 世紀中ごろ) よりずっと前から, 2 重螺旋の階段はあったようだ。江戸時代に郁堂禅師という坊さんが考案した会津さざえ堂 (1796 年建立) は世界唯一の木造 2 重螺旋という。入り口から螺旋状の登り坂をのぼり, 下りは登り坂と出会うことなく別の螺旋を降りて出口に出る。

対数螺旋 (巻貝螺旋) の作り方

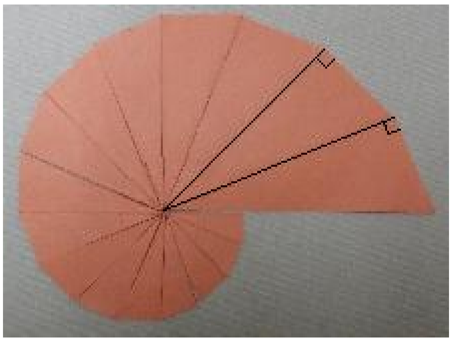
紙で対数螺旋を作ってみよう．

紙のカドを使って直角三角形を作る．小さい角を 20° ～ 30° くらいにすると作りやすい．

次に，直角の頂点から向かいの辺に直交するような折り目を作る．次に，今できた折り目と辺の交点から向かいの辺に直交する折り目を入れる．これを繰り返して，写真のような折り目をつける．



折り目を切り, できる三角形を, 大きい順に 1 枚おきに裏がえして, 写真のように並べる. こうしてできる渦巻く折れ線をなめらかな曲線で置き換えると「対数螺旋」である. ※大きい順に鉛筆で番号を書いておくと, 後の作業で助かります.



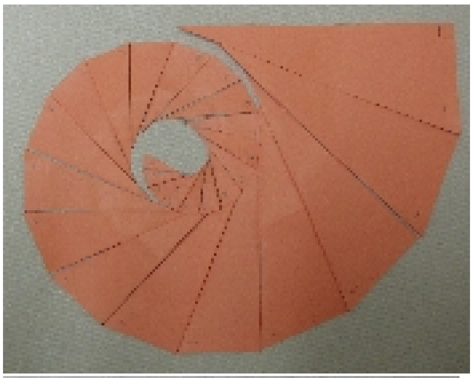
問 上と同様の三角形セットを自分で作り, 隣同士の三角形の対応する部分の長さを測り, 倍率を計算してみよ.

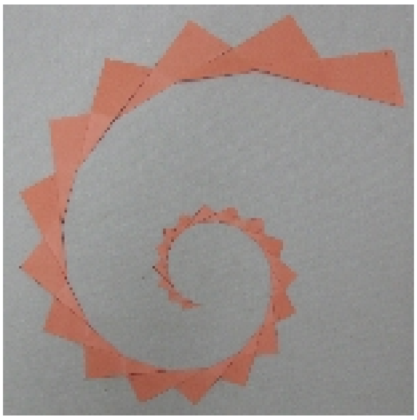
対数螺旋とは, 定点のまわりを一定角度ずつ回転すると, 定点からの距離が一定倍率で変わってゆくような曲線だった.
上の三角形セットの作り方は, 「たがいに相似で, 大きさが一定倍率で変わってゆく直角三角形たち」の作り方だったのである.

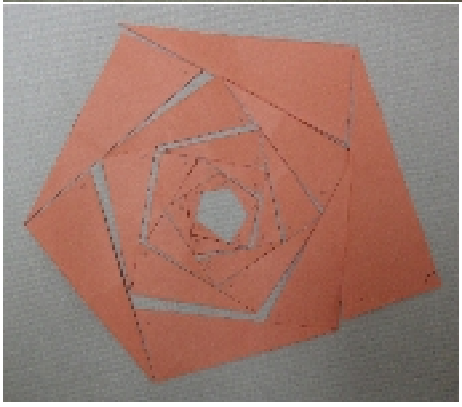
(補足) 対数螺旋を数式で表すならば, 回転角を θ(単位はラジアン), 定点からの距離を r とすると, $r = a^{\theta}$ (a は定数) となる.

対数螺旋の作り方 ヴァリエーション

先の三角形 1 セットを並べ替えて, **隣同士の配置の形を一定にする**と, いつも対数螺旋が現れる.







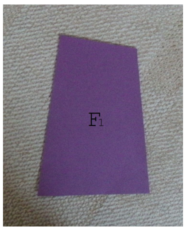
さらに, 三角形のセットでなくてもよい. どんな形でもユニットとして使える.

対数螺旋が現れるには, 大きさが一定倍率で変わる相似な (すなわち, 同じ形の) 図形たちを, **一定の配置で並べて**ゆけばよい.

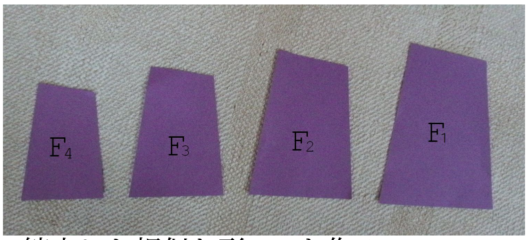
対数螺旋の作り方の原則

前のページのように直角三角形から作ることに限らずに，好きな形から対数螺旋を作ることができる．そのための手順の原則を示す．

[1] 自由な形を一つ作る．その形を F_1 と名づけておく．

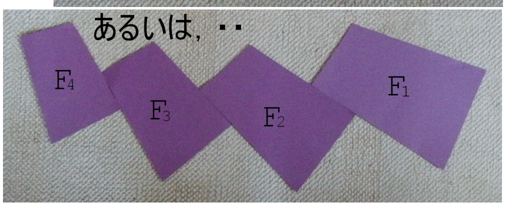


[2] F_1 と相似で，ある倍率で縮小 (あるいは拡大) した形 F_2 を作る．
その倍率は 0.9 倍でも 0.8 倍でもその他何でもよいが，ある倍率に決める．



次に，F_2 を，先と同じ倍率で縮小した相似な形 F_3 を作る．
次に，F_3 を，先と同じ倍率で縮小した相似な形 F_4 を作る．
以下同様にして，F_5，F_6，F_7，$\cdots\cdots$ を作りたいところまで作る．

[3] F_1 に F_2 をくっつける．くっつけ方は自由である．
次に, F_1 に F_2 をくっつけたのと同じくっつけ方で，F_2 に F_3 をくっつける．
すると，(F_1 と F_2 の形全体) と (F_2 と F_3 の形全体) は大きさは違うが同じ形になるはずである．
次に, 先と同じくっつけ方で, F_3 に F_4 をくっつける．
次に, 先と同じくっつけ方で, F_4 に F_5 をくっつける．



以下同様にして，くっつけてゆく．こうしてできた形は，1 本の対数螺旋に沿って並ぶ形となる．

注．[1] の形を円や正方形や正三角形などの形にすると，[3] で，$\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$ の 3 個までくっつけて初めて，くっつけ方が決まる．

対数螺旋．他の作り方

上記の「対数螺旋の作り方の原則」によれば，コピー機やパソコンソフトを使うと便利だろう．しかし，原則がわかっていれば，次のように，手描きだけでも対数螺旋をおおよそ描ける．

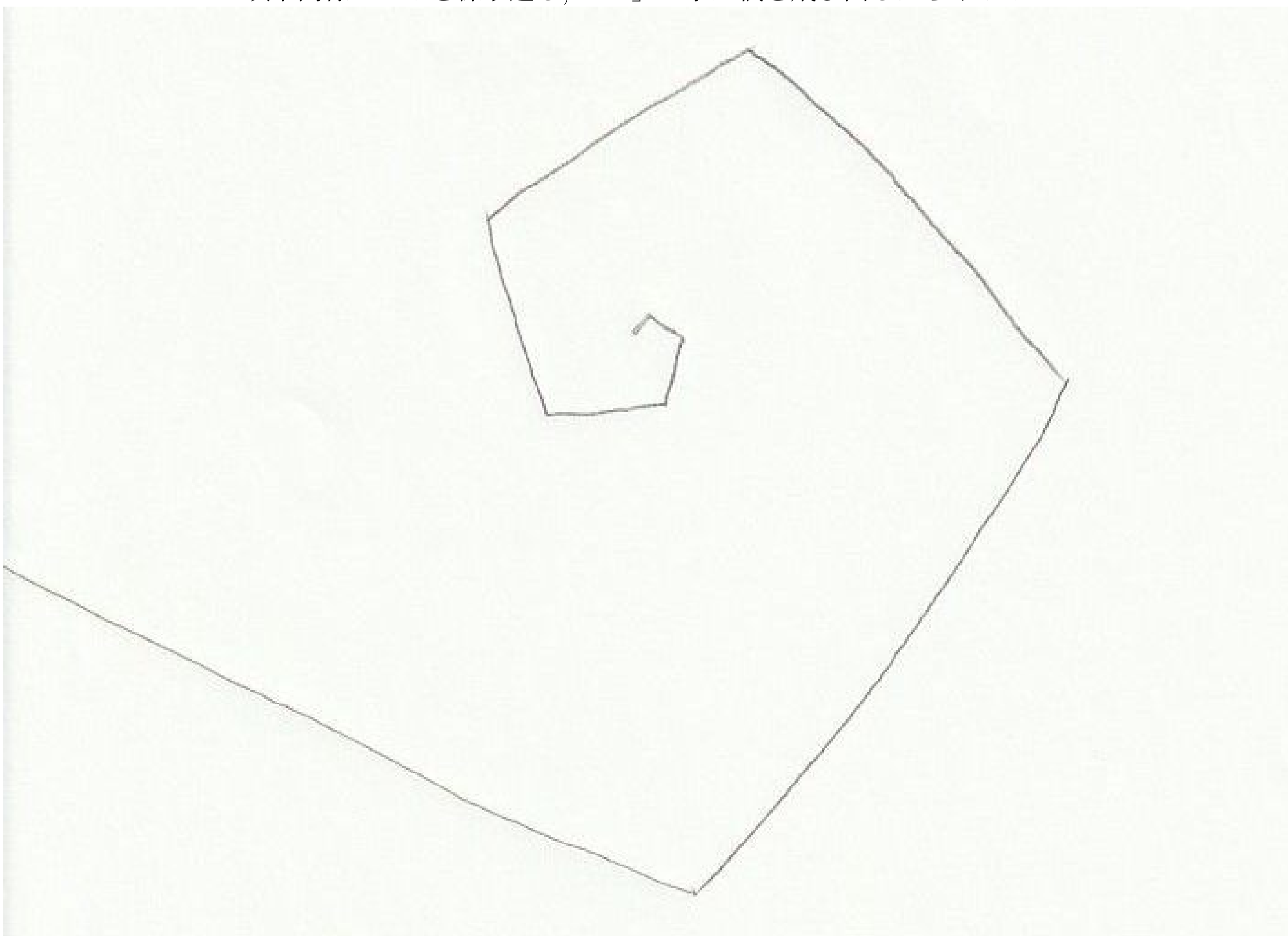
(1) への字螺旋

まず, 紙の中央に「へ」の字を小さく (左右に 1cm 以内) 書く.

「へ」の字の右側の長めの線を, 次の「へ」の字の左側の線としてそのまま使い, 次の「へ」の字を書く.

2 個目に書いた「へ」の字の右側の長めの線を, 3 個目の「へ」の字の左側の線として使って, 3 個目の「へ」の字を書く.

以下同様のことを繰り返し，「へ」の字が紙を飛び出したらやめる.



できた形は, 対数螺旋に近いはずである. 「へ」の字の角 (かど) を丸っこい線で結んでいくと, なめらかな曲線にできて, もっと螺旋らしくなる.

この「への字螺旋」を, ひとつひとつの「まっすぐな線分」がつながったものとしてみると. 次のような「対数螺旋の性質」を満たしていることがわかる.

① ユニットとなる図形はすべて相似 (同じ形) である. ········· 「への字螺旋」のユニットは「まっすぐな線分」なので, どれも同じ形 (相似) である.

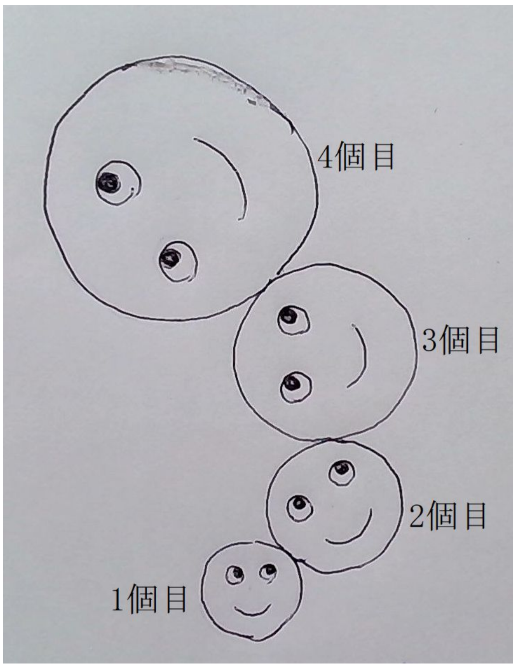
② あるユニットに対し次のユニットの大きさの倍率は一定である. ········· この紙の図では, 「への字」の左側の線に対し右側の線は長さが 1.5 倍くらいに見える. この倍率は書く人によって違うだろうが, 同じ人が書けば, だいたい同じ倍率で書くだろう.

③ あるユニットに対し次のユニットのくっつき方は一定である. ········· 「への字螺旋」のあるユニットに対し, 次のユニットがなす角度はほぼ一定である. 同じ人が書く「へ」の字の角 (かど) の曲がりぐあいはほぼ一定だとおもわれるから.

(2) 好きな形をユニットとする手描き螺旋

まず, 一個好きな絵を描く.
次に, そのとなりに, 1 個目と同じ形で大きさだけ違う 2 個目の絵を描く. (2 個目は 1 個目より大きくても小さくてもよい)
次に, 2 個目に対する 3 個目が, 1 個目に対する 2 個目と, 同じ倍率で, しかも同じ配置になるように, 3 個目を描く.

すると, (1 個目と 2 個目の全体) を拡大か縮小すると (2 個目と 3 個目の全体) と同じになる.



以下同様に, 4 個目, 5 個目, ········· を描いてゆける.
「への字螺旋」の 1 本ずつの線が絵に替ったことになる.